

Ćwiczenie 12

Moduł sztywności

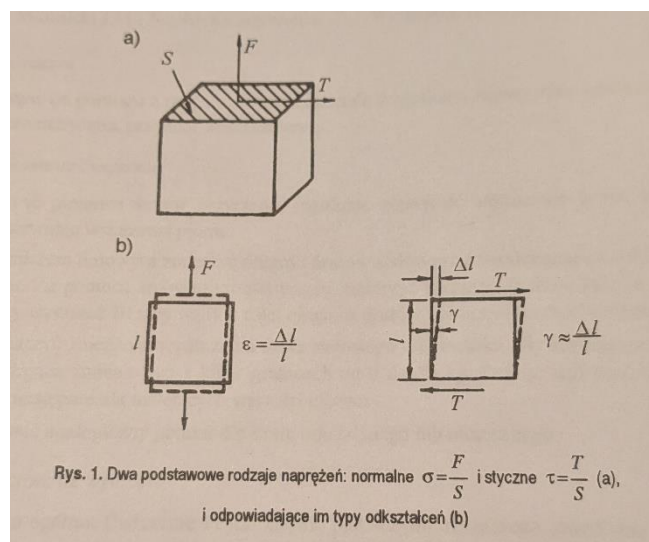
Cel ćwiczenia

Wyznaczenie modułu sztywności metali metodą dynamiczną za pomocą pomiaru okresu drgań skrętnych.

Wprowadzenie

W przypadku cieczy i gazów ciśnienie może być przyłożone jedynie prostopadle do powierzchni je ograniczającej. W przypadku ciał stałych, obok sił prostopadłych do powierzchni możliwe są również siły styczne (rys.1). W analogii do naprężenia normalnego σ zdefiniować można naprężenie styczne τ równe stosunkowi siły w stycznej T do powierzchni S .

Rezultatem przyłożenia pary sił stycznych T do kostki materiału (rys.1b) jest jej pochylenie. Kąt $\gamma = \Delta l / l$ jest miarą odkształcenia pierwotnej postaci.



Dla naprężeń i odkształceń stycznych również obowiązuje prawo Hooke'a wyrażone wzorem analogicznym jak w przypadku naprężeń i odkształceń normalnych

$$\tau = G \gamma$$

Stałą materiałową G będącą stosunkiem naprężenia stycznego τ do wywoływanego przez nie odkształcenia postaci γ nazywamy **modułem sztywności**.

Nietrywialnym rezultatem teorii sprężystości jest, że tylko dwie stałe- moduł sztywności G oraz moduł Younga E - określają wszystkie własności sprężyste izotropowego ciała stałego. Oznacza to, że w celu obliczenia odkształceń we wszelkich, bardziej skomplikowanych stanach naprężeń, nie potrzeba wprowadzać nowych stałych sprężystości. Przykładowo, moduł Younga określa, obok rozciągania także ściskanie i zginanie prętów, moduł sztywności jest niezbędny dla opisu skręcania prętów czy rozciągania sprężyn, wreszcie obydwa moduły E i G potrzebne są do obliczenia zmiany objętości ciała stałego pod wpływem ciśnienia hydrostatycznego.

Skrećenie pręta walcowego

W przeciwieństwie do modułu Younga, bezpośrednie wyznaczenie modułu sztywności z wzoru (1) jest niepraktyczne, gdyż trudno zrealizować przyłożenie do powierzchni kostki odpowiednio dużej siły stycznej i pomiar niewielkiego kąta γ . W celu wyznaczenia G wykorzystamy zjawisko skrećenia pręta walcowego.

Skrećenie jest odkształceniem wywołanym działaniem pary sił przyłożonej do płaszczyzny przekroju poprzecznego pręta. Podatność materiału pręta na skrećenie zależy wyłącznie od modułu sztywności G i rozmiarów geometrycznych, tj. promienia r długości l . Poniżej wyprowadzimy związek między momentem skręcającym M i kątem skrećenia pręta φ . Schemat geometryczny odkształcenia rozpatrywanego pręta przedstawiono na rys. 2.

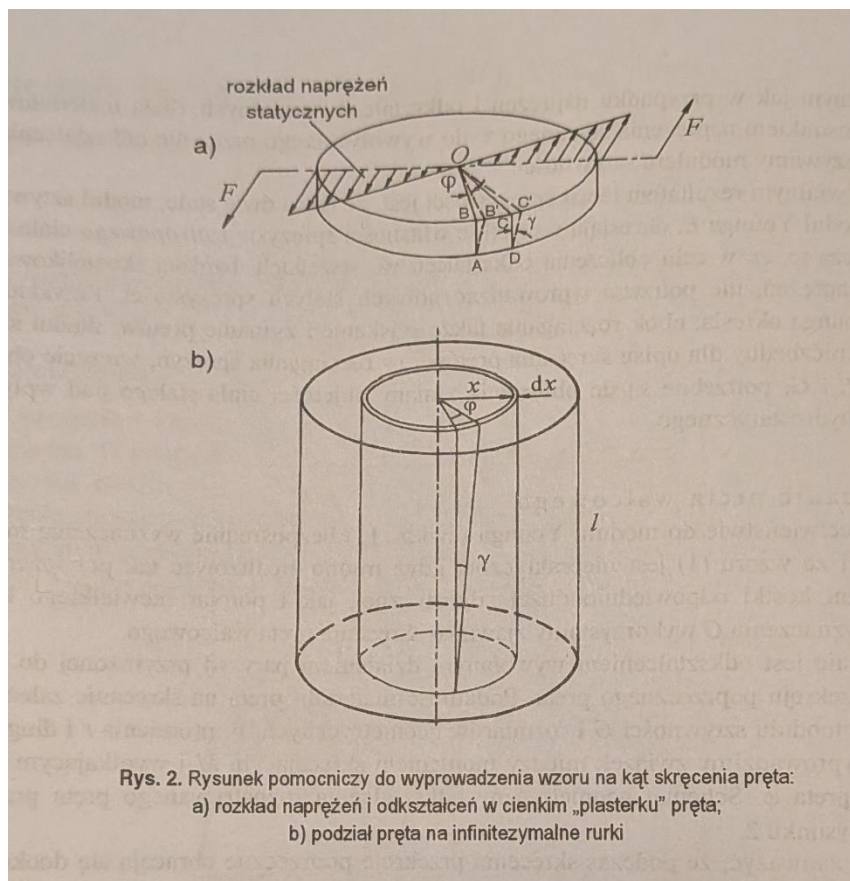
Należy zauważyć, że podczas skrećenia przekroje poprzeczne obracają się dookoła osi pręta, który nie zmienia przy tym swojej długości ani średnicy. Promień OB obróci się o kąt φ do położenia OB' . Dwie tworzące AB i DC na powierzchni tej warstwy pochyłają się o kąt γ tak, że utworzony element kwadratowy $ABCD$ przekształci się w romb $AB'C'D$. Oznacza to, że powstaną odkształcenia postaci (kształtów), których miarą jest kąt γ . Jest on proporcjonalny do odległości od osi obrotu. Z analizy trójkątów ABB' i OBB' (posiadających wspólny bok BB') wynika, że odkształcenie postaci materiału pierścienia wynosi

$$\gamma = \varphi \frac{x}{l} \quad (2)$$

Zgodnie z prawem Hooke'a wartości naprężeń stycznych wynoszą

$$\tau = G\gamma = \frac{G\varphi x}{l} \quad (3)$$

wzory (2) i (3) oznaczają że naprężenia i odkształcenia są największe przy powierzchni walca i maleją do zera w miarę zbliżania się do jego osi.



Całkowity moment siły można obliczyć przez całkowanie przyczynków do momentu pochodzących od infinitezimalnych rurek promieniu x i grubości dx (pokazanych na rys. 2b). Wartość siły stycznej dT pochodzącej od rurki otrzymamy mnożąc naprężenie τ przez powierzchnię przekroju dS .

$$dT = \tau dS = \frac{G\varphi x}{l} 2\pi x dx \quad (4)$$

Pojedyncza rurka daje zatem przyczynkę do momentu siły równy $dM = x \cdot dT$. Całkowity moment siły działający na pręt wynosi

$$M = \int_0^r dM = \frac{\pi G r^4}{2l} \varphi \quad (5)$$

i jest proporcjonalny do kąta skręcenia φ . Wielkość D równą

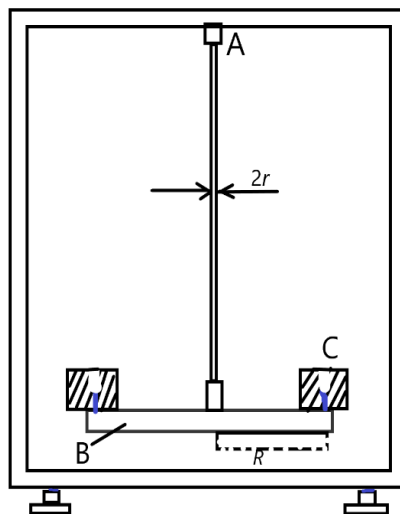
$$D = \frac{M}{\varphi} = \frac{\pi G r^4}{2l} \quad (6)$$

nazywamy stałą skręcenia.

Dynamiczna metoda pomiaru modułu sztywności

Narzuca się możliwość bezpośredniego wyznaczenia modułu sztywności przez pomiar wszystkich innych wielkości występujących we wzorze (5). Byłaby to metoda statyczna. Znacznie wygodniejsza jest jednak metoda dynamiczna, która polega na pomiarze okresu drgań skrętnych układu złożonego z badanego pręta obciążonego ciałem o momencie bezwładności I_0 . Przewaga metody dynamicznej polega na zastąpieniu pomiaru siły i kąta skręcenia przez łatwiejszy do przeprowadzenia pomiar okresu drgań

Urządzenie do wykonania pomiarów modułu sztywności nosi nazwę wibratora (rys. 3). W wibratorze na statywie zamocowany jest drut, na końcu którego sztywno przymocowana jest platforma, której moment bezwładności można zmieniać dokładając pierścieni lub ciężarki. Górny koniec drutu z badanego materiału jest przymocowany do statywu za pomocą uchwyty A. Drugi koniec drutu połączony jest z wibratorem B tak, by jego środek ciężkości oraz punkt zawieszenia znajdowały się w jednej pionowej linii.



Rys.3. Schemat budowy wibratora do badania drgań skrętnych obciążony ciężarkami C

Jeżeli skęcimy wibrator o pewien kąt w płaszczyźnie poziomej, to jednocześnie drut skęcni się o ten sam kąt. Powstanie w drucie moment obrotowy sił sprężystych, które po oswobodzeniu wibratora wywołują jego ruch drgający. Zgodnie z prawami dynamiki dla ruchu obrotowego okres drgań zależy od stałej skęcienia D i momentu bezwładności I_x .

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_x}{D}} \quad (7)$$

Aby uniknąć trudnego wyznaczania momentu bezwładności I_x wibratora, wykonujemy dwie różne serie pomiarów okresu drgań. Jedną dla wibratora nie obciążonego i drugą dla wibratora dodatkowo obciążonego ciałem geometrycznie prostym o łatwym do obliczenia momencie bezwładności (np. pierścieniem lub ciężarkami). Okres drgań wibratora obciążonego T_2 wynosi

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_x + I_0}{D}} \quad (8)$$

na podstawie wzorów (5), (7) i (8) znajdujemy wartość modułu sztywności jako

$$G = \frac{8\pi I_0 l}{r^4 (T_2^2 - T_1^2)} \quad (9)$$

Jako dodatkowe obciążenie wibratora, o łatwym do obliczenia momencie bezwładności, stosujemy zestaw 4 ciężarków osadzonych w odległości R na ramionach wibratora (rys. 3), względnie metalowy pierścień.