

Ćwiczenie 3

Wahadło rewersyjne

Cel ćwiczenia

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła rewersyjnego.

Wprowadzenie

Przyspieszenie ziemskie można najprościej wyznaczyć wykorzystując znany związek dla wahadła matematycznego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

Wystarczy w odpowiednim doświadczeniu zmierzyć okres T oraz długość wahadła l , co łatwo wykonać dość dokładnie. Niestety, obliczone tak przyspieszenie byłoby obarczone znaczącym błędem metodycznym, gdyż w realnym doświadczeniu mamy zawsze do czynienia z wahadłem fizycznym. Lepiej zatem oprzeć doświadczenie na analogicznym związku dla drgań wahadła fizycznego w polu sił ciężkości.

Zakładamy, że podstawowe pojęcia i związki dotyczące ruchu drgającego harmonicznego są już znane. Tu przypomnimy tylko postać ogólnego równania ruchu bryły sztywnej zawieszonej na osi w polu sił ciężkości

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m g a}{I} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

gdzie: m - masa bryły,

a - odległość osi od środka masy S ,

I - moment bezwładności względem osi obrotu.

Równanie (2) dla dowolnego Θ opisuje ruch okresowy, nieharmoniczny o okresie zależnym od amplitudy (patrz ćw. 2). Przyjęcie przybliżenia $\sin \Theta \approx \Theta$ słusznego dla małych kątów wychylenia, daje od razu znane rozwiązanie

$$\Theta = \Theta_m \sin \omega_0 t \quad (3)$$

gdzie

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{m g a}{I}}$$

czyli

$$\text{okres } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g a}} \quad (4)$$

Ze wzoru (4) widać, że przy stosowaniu metody wykorzystującej ten związek pojawiają się trudności z bezpośrednim, wystarczająco dokładnym pomiarem I oraz a . Można je zmniejszyć dobierając odpowiedni kształt bryły, ułatwiający dokładniejszy pomiar tych parametrów.

Istnieje jednak inna, ciekawa metoda pozwalająca na korzystanie - mimo posługiwania się również wahadłem fizycznym - nie bezpośrednio ze wzoru (4), lecz z prostszego, w którym te pomiarowo kłopotliwe parametry nie występują. Metoda ta bazuje na badaniu okresów wahań danej bryły względem różnych osi obrotu.

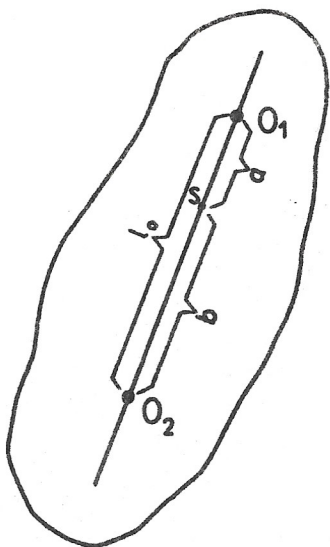
Skupiając uwagę na bryle wahającej się względem osi O_1 (rys. 1) zapytajmy: czy istnieje taka oś O_2 przechodząca przez prostą O_1S i równoległa do osi O_1 , względem której bryła wahałaby się z takim samym okresem, jak względem O_1 . Jeśli tak, to w którym punkcie prostej O_1S ta oś powinna się znajdować?

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1 mamy

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{m g a}} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{m g b}} \quad (5)$$

lub wykorzystując twierdzenie Steinera

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_s + m a^2}{m g a}} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_s + m b^2}{m g b}} \quad (6)$$



Rys. 1. Dwuosłowe wahadło fizyczne

I_1 , I_2 i I_S oznaczają momenty bezwładności kolejno względem osi: O_1, O_2 i przechodzącej przez środek masy S .

Okresy T_1 i T_2 są równe, jeśli

$$\frac{I_S + m a^2}{a} = \frac{I_S + m b^2}{b}$$

czyli

$$(b - a) (I_S - m a b) = 0 \quad (7)$$

Otrzymaliśmy odpowiedź: dla dowolnej osi O_1 można zrealizować równość okresów $T_1 = T_2$ w każdej z dwóch sytuacji:

- I. gdy O_2 obierzemy w odległości $b = a$,
- II. gdy O_2 obierzemy w odległości takiej, że

$$a b = \frac{I_S}{m} \quad (8)$$

W sytuacji I o okresach wyrażonych przez związki (6) nie możemy powiedzieć nic specjalnie ciekawego (poza tym, że są takie same), za to w sytuacji II otrzymujemy z (6) i (8)

$$T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_S + m a^2}{m g a}} = 2\pi \sqrt{\frac{m a (b + a)}{m g a}}$$

Oznaczając odległość między osiami O_1 i O_2 przez

$$l_0 = a + b \quad (9)$$

$$\text{oraz } T_1 = T_2 = T_0$$

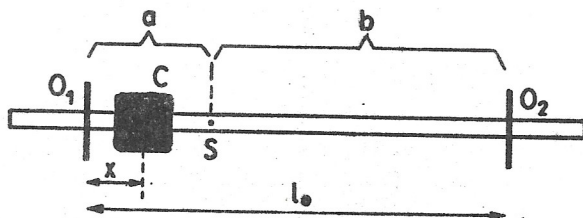
mamy ostatecznie

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} \quad (10)$$

Na podstawie związku (10) zarysowała się zatem idea prostego i dokładnego pomiaru przyspieszenia ziemskiego, bez wyznaczania I_S , m i środka masy, a tylko przez łatwy pomiar okresu oraz odległości między osiami.

Jak jednak praktycznie znaleźć osie, dla których jest słuszny warunek (8), mając bryłę o danym kształcie, a więc z góry ustalonym położeniu środka masy S oraz I_S i m ? Nie możemy przecież dziurkować co kawałeczek bryły dla montażu osi! Ponadto musielibyśmy mieć pewność, że nie natknęliśmy się na sytuację I, w której związek (10) nie jest słuszny.

A gdyby postąpić odwrotnie? to znaczy zamocować na stałe dwie osie, zmieniać zaś położenie środka masy, a wraz z nim I_S aż do spełnienia warunku $T_1 = T_2$? Można to sobie praktycznie wyobrazić w ten sposób, że na pręcie mającym na stałe zainstalowane dwie osie obrotu umieszczamy (między osiami) ciężarek nadziany wcześniej na pręt. To jest właśnie wahadło rewersyjne (rys. 2).



Rys. 2. Symetryczne wahadło rewersyjne

Przesuwając ciężarek wzdłuż pręta i mierząc okresy względem obu osi poszukujemy sytuacji, w której $T_1 = T_2$. Jeśli jednak z pomiarów okresów otrzymamy równość $T_1 = T_2$, to skąd mamy mieć gwarancję, że położenie ciężarka realizowało sytuację II a nie I? Najlepiej więc byłoby wyeliminować w ogóle nieprzydatną sytuację I, czyli skonstruować takie wahadło, by przy jakimkolwiek położeniu ciężarka C nie zachodził warunek $a = b$. Czy jest to możliwe? Tak.

Jeśli wahadło bez ciężarka C jest mocno asymetryczne, tzn. jego środek masy S_0 wypada bardzo blisko którejś z osi np. O_2 , to nawet przesunięciem ciężarka C do samej osi O_1 nie zdołamy na tyle przesunąć środka ciężkości S całego układu, aby zrealizować $a = b$.

Receptą na uniknięcie $a = b$ jest więc dostatecznie duża asymetryzacja wstępna wahadła. Zwykle wahadło rewersyjne ma dlatego dodatkowo jeden lub dwa przesuwalne ciężarki umieszczone poza osiami, umożliwiając regulację położenia środka masy S_0 , a zatem także regulację zakresu położzeń S (oraz wartości I_S).

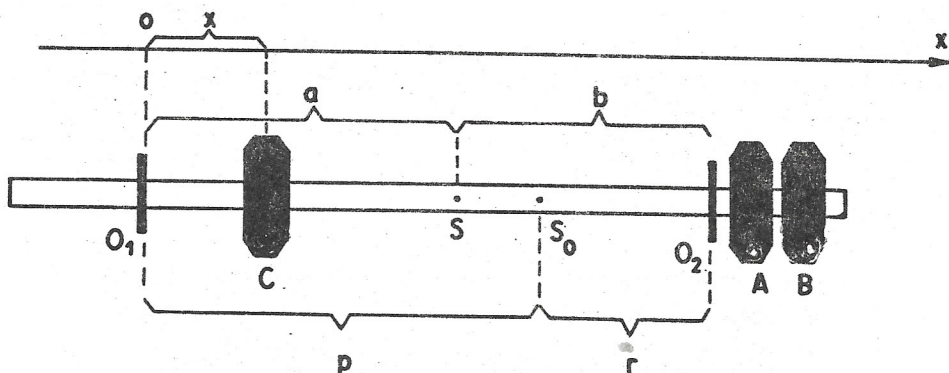
Trzeba jeszcze sprawdzić, czy dla naszego wahadła na pewno będzie istniało położenie x ciężarka C, przy którym zajdzie oczekiwana sytuacja II, czyli związek (8). Przepiszemy go w postaci

$$a(l_0 - a) = \frac{I_S}{m} \quad (11)$$

Przesunięcie ciężarka zmienia (patrz rys. 2) niewiadomą a w równaniu, ale również wpływa na wartość I_S . Ponieważ równanie (11) jest drugiego stopnia, ogólnie można się spodziewać dwóch rozwiązań dla a, czyli dwóch różnych wartości położenia x ciężarka, przy których wypełnianie warunku (11) umożliwia obliczenie przyspieszenia ze związku (10). To jednak, czy rozwiązania będą istniały ($\Delta \geq 0$) zależy od konkretnych wartości I_S . Reasumując: od wstępnego dobrania położenia ciężarków A i B w konkretnym wahadle zależy w istotny sposób, czy zaobserwujemy, oraz dla ilu położzeń ciężarka C, równość okresów $T_1 = T_2$, czy okres taki wolno wykorzystać we wzorze (10), aby obliczyć przyspieszenie, jaka będzie dokładność tych pomiarów.

Literatura

1. Kittel C., Knight W.D., Ruderman M.A.: Mechanika. PWN. Warszawa 1969.
2. Piekara A.: Mechanika. PWN. Warszawa 1964.
3. Płazek T., Suszycki L.: Dodatek do 2 cz. skryptu pt. Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki. Zięba A. Konopka M.



Rys. 3. Asymetryczne wahadło rewersyjne używane w naszej pracowni

Aparatura

W naszej pracowni używa się wahadła rewersyjnego (rys. 3), w którym ciężarki A i B zamocowane są na stałe w takich miejscach (oba na jednym końcu wahadła), że nieprzydatna sytuacja I nie występuje wcale, a sytuacja II umożliwiająca pomiar przyspieszenia ze wzoru (10) realizuje się przy dwóch położeniach ciężarka C. Zakres zmian położenia ciężarka C wynosi około 25 cm. Wahadło należy zawieszać tak, by pręt nie tarł o wspornik. Do wykonania ćwiczenia potrzebny jest sekundomierz do pomiaru okresu oraz przymiar milimetrový do pomiaru odległości l_0 między osiami.

Wykonanie ćwiczenia

1. Zawiesić wahadło na osi O_1 .
2. Zmierzyć położenie x ciężarka C na skali zaznaczonej na pręcie.
3. Wprawić wahadło w ruch drgający o amplitudzie 4 - 5 cm.
4. Po wykonaniu przez nie 2-3 wahań, w momencie maksymalnego wychylenia uruchomić stoper i zacząć liczyć pełne drgania.
5. Przerwać pomiar po 50 wahań, zanotować czas $50 T_1$.
6. Powtórzyć pomiary zmieniając położenie x ciężarka C co 2 cm np. z góry w dół. Położenie x odczytywać zawsze względem tego samego brzegu ciężarka C. Wyniki notować w tabelce oraz zaznaczać graficznie w układzie współrzędnych ($50 T_1, x$).
7. Zdjąć wahadło, zmierzyć odległość między osią O_1 i O_2 , zawiesić wahadło na osi O_2 .

8. Wykonać wszystkie pomiary analogicznie jak dla zawieszenia na osi O_1 , uważając by odczytywać położenie x względem tego samego (co w poprzedniej serii pomiarów) brzegu ciężarka. Punkty tej serii pomiarów oznaczać na wykresie inaczej.

9. Zageścić pomiary okresów dla tych położań x ciężarka C , w pobliżu których $50 T_1 = 50 T_2$.

Opracowanie wyników

1. Odczytać z wykresu rzędne punktów przecięcia krzywych. Jeśli nie są one równe - wyliczyć ich średnią wartość, a następnie podzielić przez 50. Otrzymany czas jest równy szukanemu okresowi T .

2. Policzyc poprawkę uwzględniając skończone wartości kątów wychyleń zgodnie ze wzorem (patrz wzór 3 w ćw. 2):

$$T_0 = T \left(1 - \frac{1}{16} \theta_0^2 \right)$$

Czy poprawka ta ma istotny wpływ na wielkość okresu?

3. Obliczyć przyspieszenie ziemskie g na podstawie wzoru (10), porównać je z wartością tablicową.

4. Obliczyć błąd wyznaczonego przyspieszenia ziemskiego na podstawie prawa przenoszenia błędów.