Ćwiczenie 32

Mostek Wheatstone'a

Cel ćwiczenia

Mostek Wheatstone'a jako przykład zastosowania praw Kirchoffa do opisu złożonych obwodów elektrycznych. Pomiar nieznanych oporów oraz ich połączeń szeregowych i równoległych.

Wprowadzenie

Znalezienie wielkości napięć i prądów płynących w poszczególnych częściach obwodu elektrycznego jest zagadnieniem podstawowym w konstrukcji układów o różnym przeznaczeniu.

Rozwiązywanie obwodów prądu stałego opiera się na następujących prawach:

(i) w węzłach sieci, tzn. w punktach wspólnych dla trzech lub więcej przewodów, algebraiczna suma natężeń prądów wpływających musi być równa zeru. To tzw. prądowe prawo Kirchoffa nazywane jest alternatywnie I prawem Kirchoffa.

(ii) suma różnic potencjałów obliczonych kolejno wzdłuż zamkniętej pętli sieci (tzw. oczka) – tzn. drogi, która rozpoczyna się i kończy w tym samym węźle – równa się zeru. Nazywane jest napięciowym, albo II prawem Kirchoffa.

(iii) stosunek napięcia między końcami przewodnika do natężenia prądu jest wielkością stałą, nazywaną opornością (prawo Ohma);

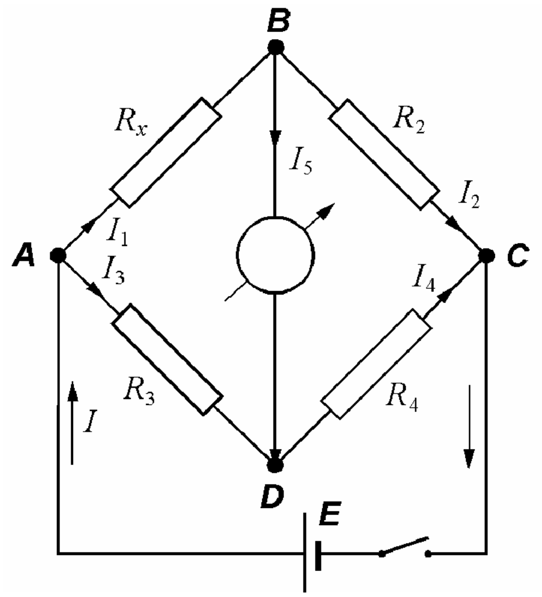
Warunki powyższe zapisuje się w postaci algebraicznego układu takiej liczby niezależnych równań *liniowych*, która pozwala na jednoznaczne znalezienie poszukiwanych prądów. Należy tu uczynić zastrzeżenie, że o ile obydwa prawa Kirchoffa są słuszne zawsze, to prawo Ohma może nie być spełnione w elementach *nieliniowych* takich jak dioda.

Mostek Wheatstone'a jest układem do pomiaru (porównywania) oporów. Tworzy go połączenie czterech oporów: R_X, R_2, R_3, R_4 oraz galwanometru o oporze R_5. Mostek jest zasilany z ogniwa galwanicznego lub zasilacza o sile elektromotorycznej E i oporze wewnętrznym R_E (rys. 1).

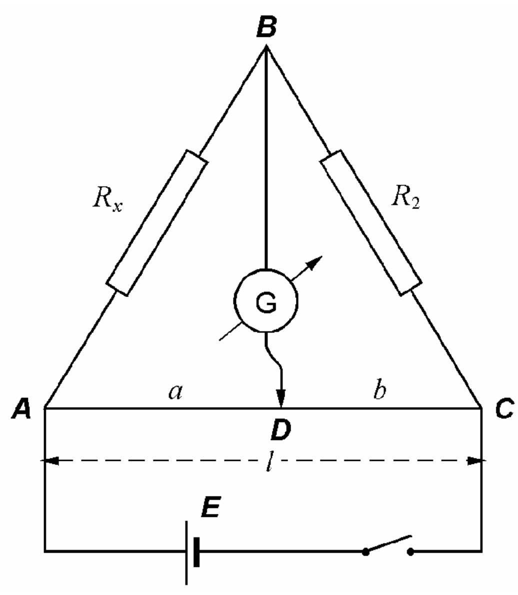
Analiza tego układu jest stosunkowo prosta. Niech I oznacza natężenie prądu płynącego z ogniwa, a natężenia prądów w odcinkach obwodu *AB*, *BC*, *AD*, *DC* i *BD* odpowiednio: I_1, I_2, I_3, I_4, I_5. W układzie są 4 węzły: *A*, *B*, *C*, *D*. Dla trzech z nich układa się równania Kirchhoffa. Jeśli kierunek prądu jest taki, jak wskazują strzałki, dla węzłów *A*, *B* i *D* otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A&:\quad I - I_1 - I_3 = 0, \\ B&:\quad I_1 - I_2 - I_5 = 0, \\ D&:\quad I_5 + I_3 - I_4 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Drugi układ równań Kirchhoffa można ułożyć wydzielając w schemacie zamknięte obwody (oczka) *ABDA*, *BCDB* i *ADCEA*.



Rys. 1. Oporowy mostek Wheatstone'a



Rys. 2. Układ pomiarowy mostka z drutem oporowym

Obchodząc każdy z tych oczek według kierunku wskazówek zegara otrzymujemy:

$$\begin{aligned} ABDA&: \quad I_1R_x + I_5R_5 - I_3R_3 = 0, \\ BCDB&: \quad I_2R_2 - I_4R_4 - I_5R_5 = 0, \\ ADCEA&: \quad I_3R_3 + I_4R_4 + IR_E = E. \end{aligned} \tag{2}$$

Jeśli dana jest siła elektromotoryczna E oraz opory R_x, R_2, R_3, R_4, R_5, R_E, można znaleźć natężenia wszystkich sześciu prądów I, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5.

Metoda Wheatstone'a porównywania oporów polega na tzw. równoważeniu mostka, to znaczy na takim dopasowaniu oporów, by potencjały w punktach B i D były równe ($V_B = V_D$), czyli żeby prąd I_5 płynący przez galwanometr G był równy zeru. Przy $I_5 = 0$ drugie i trzecie równanie układu (1) dają:

$$I_2 = I_1, \quad I_3 = I_4, \tag{3}$$

a pierwsze i drugie równanie układu (2):

$$I_1R_x = I_3R_3, \quad I_2R_2 = I_4R_4. \tag{4}$$

Z równań (3) i (4) wynika, że

$$\frac{R_x}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}, \qquad \text{czyli} \qquad R_x = R_2\frac{R_3}{R_4}. \tag{5}$$

Ostatnie wyrażenie pozwala eksperymentalnie wyznaczyć R_x.

Mostek Wheatstone'a używany w ćwiczeniu przedstawiono na rysunku 2. Prąd płynący z ogniwa galwanicznego E rozgałęzia się w punkcie A. Jedna jego część płynie przez szeregowo połączone opory R_x i R_2, druga przez przewód AC. Przez zmiany położenia punktu D zmienia się stosunek oporów R_3 do R_4.

Na odcinku *BGD* prąd nie będzie płynął, jeżeli

$$\frac{R_x}{R_2} = \frac{R_{AD}}{R_{DC}} . \tag{6}$$

Ponieważ R_{AD} i R_{DC} są oporami odcinków tego samego jednorodnego drutu, o długościach równych, odpowiednio, *a* i *b* (rys. 2). Ich wartości wyrażają wzory

$$R_{AD} = \rho \frac{a}{S}, \quad \text{oraz} \quad R_{DC} = \rho \frac{b}{S},$$

w których *S* oznacza przekrój drutu, a ρ - oporność właściwą materiału drutu. Po podstawieniu tych wyrażeń do równania (6) otrzymujemy

$$\frac{R_x}{R_2} = \frac{a}{b} . \tag{7}$$

Ponadto suma $a + b$ jest równa całkowitej długości drutu *l*, zatem $b = l - a$. Ostatecznie otrzymujemy wzór

$$R_x = R_2 \frac{a}{l - a} . \tag{8}$$

umożliwiający obliczenie nieznanej oporności R_x na podstawie znanej oporności R_2 oraz zmierzonych długości *a* i *l*.

Dokładność pomiaru mostkiem Wheatstone'a z drutem oporowym zależy przede wszystkim od niepewności wyznaczenia odległości *a*. Zgodnie z prawem przenoszenia niepewności,

$$u(R_x) = \left| \frac{\mathrm{d}R_x}{\mathrm{d}a} \, u(a) \right| = R_2 \frac{l}{(l - a)^2} \, u(a) .$$

Względna niepewność mierzonego oporu wynosi

$$\frac{u(R_x)}{R_x} = \frac{R_2 \dfrac{l}{(l-a)^2} u(a)}{R_2 \dfrac{a}{l-a}} = \frac{l}{l-a} \frac{u(a)}{a} . \tag{9}$$

Nasuwa się pytanie, dla jakiej wartości *a* względna niepewność pomiaru jest najmniejsza. Można to obliczyć przez znalezienie pochodnej wzoru (9) względnej zmiennej *a* i przyrównanie jej do zera. Obliczenie takie prowadzi do równania

$$-\frac{l(l-2a)}{a(l-a)^2} \frac{u(a)}{a} = 0 . \tag{10}$$

Jego rozwiązanie $a = \frac{1}{2} l$ oznacza, że aby pomiar był jak najdokładniejszy należy tak dobrać opór R_2, aby stan równowagi mostka można było uzyskać w przybliżeniu w połowie długości drutu oporowego.

Mostek Wheatstone'a zrealizowany przy pomocy precyzyjnych dekadowych opornic wzorcowych stanowił przez ponad sto lat podstawowy przyrząd do dokładnych pomiarów oporów. W chwili obecnej równie dokładne, a wygodniejsze w użyciu są cyfrowe mierniki oporności. Zasada mostka Wheatstone'a przydaje się współcześnie najbardziej, gdy interesuje nas pomiar małych *zmian* oporu. Przykładem takich zastosowań mostka Wheatstone'a są zbudowane na jego zasadzie mierniki wielkości nieelektrycznych takich jak naprężenie (tensometry), ciśnienia hydrostatycznego czy mierniki próżni. W każdym przypadku mierzona wielkość nieelektryczna powoduje małą zmianę oporności odpowiedniego czujnika powodująca utratę pierwotnej równowagi mostka, zaś napięcie nierównowagi między ramionami mostka jest miarą badanej wielkości nieelektrycznej.